משחקים קומבינטוריים*

מאת: א. פרנקל

1. הקדמה

נתאר כאן צרור משחקים קומבינטוריים והאיסטרטגיות שלהם המבטיחות נצחון או תיקו.

בשם "משחק קומבינטורי" אנו מכנים משחק של שני שחקנים עם מידע מושלם (שלא כבמשחקי קלפים בהם יש מידע חבוי), ללא מהלכי אקראי (ללא קוביות), שבו אחד השחקנים מנצח והשני מפסיד, או שהמשחק איננו מגיע לכלל סיום ואז התוצאה מוגדרת כתיקו.

רמת הקושי של המשחקים עולה בהדרגה, אבל גם המשחקים המתקדמים ביותר הניתנים כיום לניתוח, רחוקים עדיין מרחק ניכר אף מדמקה. אגב, יש רגליים לדבר שמשפחות של משחקים הכוללות את דמקה הן "מסובכות בטבעם", וספק אם אי-פעם ניתן יהיה לחשב עבורן איסטרטגיה בזמן סביר!

כל המשחקים הם, כאמור, משחקים של זוג שחקנים המשחקים לסירוגין, ונדון פה במשחקים אשר בהם זה המבצע את המהלך האחרון הוא המנצח.

2. נים

המשחק הקומבינטורי הידוע ביותר הוא נים.
במשחק זה מוצבות n ערימות של איברים, למשל גפרורים, על שולחן. כל שחקן בתורו צריך לבחור ערימה אחת ולקחת ממנה מספר גפרורים כרצונו (החל מגפרור אחד ועד לכל הערימה).
השחקן שביצע את המהלך האחרון ז"א השחקן שנטל את הגפרורים האחרונים, הוא המנצח.
ננתח משחק זה ע"י דיון במקרים הפרטיים $n = 1,2,3$, ולאחר מכן במקרה הכללי של n ערימות.
כדי לנתח משחקים כגון זה, מגדירים שלושה סוגי מצבים בכל משחק:

א. <u>מצב P</u> (קיצור של previous: קודם) הוא מצב שבו השחקן <u>הקודם</u> - זה שהביא למצב הנוכחי - יכול לנצח, ללא קשר במהלכיו הבאים של היריב.

ב. <u>מצב N</u> (קיצור של next: הבא לאחריו) הוא מצב שבו השחקן <u>הבא</u> - זה שתורו לבצע את המהלך - יכול לנצח, ללא קשר במהלכיו הבאים של היריב.

---

*מאמר זה הוא עיבוד של חלק ממאמר מקיף יותר אשר הופיע ב"גליונות מתמטיקה" כרך 6 מס' 1.

ג. מצב T (קיצור של tie: תיקו) הוא מצב בו אף שחקן אינו יכול לכפות נצחון (ולכן כל שחקן יכול למנוע הפסד).

מהגדרות אלו נובע שכל מצב המתקבל (במהלך אחד) ממצב P הוא מצב N, כלומר השחקן לאחר מהלך אחד יכול לנצח ללא תלות במהלך היריב, וזה מצב N.
כמו כן נובע כי בין כל המצבים המתקבלים (במהלך אחד) ממצב N, קיים לפחות מצב P אחד, היינו, אם השחקן ביצע את המהלך הנכון ממצב N הרי הוא בעל היכולת לנצח ללא תלות במהלכי השחקן השני.

על פי הגדרות אלה, ננתח את משחק נים:

במשחק נים אין שום מצבי תיקו.
עבור $n = 1$, כלומר ערימה אחת, כל מצב הוא מצב N (פרט לערימה ריקה, ערימה שאין בה אף גפרור, שהיא מצב P). זאת מאחר והשחקן הפותח במשחק יכול לקחת את כל הערימה ולנצח.

עבור $n = 2$, כל מצב של שתי ערימות בגודל שווה הוא מצב P, כי כל אשר יעשה השחקן הראשון (= השחקן הבא) באחת משתי הערימות יחקה השחקן השני (= השחקן הקודם), בערימה השניה, ולכן השחקן השני יבצע את המהלך האחרון וינצח. אם שתי הערימות אינן בגודל שווה, כל המצבים הם מצבי N, כי ע"י מהלך אחד אפשר להביא לשתי ערימות שוות, כלומר למצב P.

עבור $n = 3$, כלומר, שלוש ערימות, המצב (1,2,3) (כלומר, גפרור אחד בערימה הראשונה, שני גפרורים בשניה ושלושה גפרורים בערימה השלישית) הוא דוגמא של מצב P. מצב זה מסתבר מתוך תאור הצעדים האפשריים הבאים:

א. אם השחקן הראשון עובר למצב (0,2,3), על ידי לקיחת הערימה הראשונה, עובר השני למצב (0,2,2) שהוא מצב P, כפי שהוסבר עבור $n = 2$.

ב. אם השחקן הראשון עובר למצב (1,1,3), עובר השני למצב (1,1,0) שגם הוא מצב P.

ג. אם השחקן הראשון עובר למצב (1,0,3), עונה השני על ידי מעבר למצב (1,0,1) שהוא שוב מצב P.

ד. אם השחקן הראשון עובר ל (1,2,2), עונה השני ב (0,2,2).

ה. אם פעולת השחקן הראשון היא (1,2,1), תשובת השחקן השני היא מצב (1,0,1).

ו. אם מהלך השחקן הראשון הוא (1,2,0), תשובת השני תהיה (1,1,0).
מכאן שמצב התחלתי של (1,2,3) הוא מצב P.

גם האיסטרטגיה הכללית עבור n ערימות ידועה לעוסקים בתורת המשחקים הללו:
נסמן את המצב הכללי ב - $K = (K_1, K_2, \ldots, K_n)$, כאשר K_i מסמן את מספר הגפרורים בערימה ה-i. נבטא כל K_i בשיטה הבינרית (לפי בסיס 2) ונסכמם ללא סיפרת נישא (העברה) מטור לטור. סכום כזה נקרא "סכום נים". לדוגמא:

$$\begin{aligned} K_i &= 10110 \quad (=22) \\ K_j &= \underline{01111} \quad (=15) \\ & 11001 \end{aligned}$$

במלים אחרות: בטור כלשהו, סיפרת הסכום היא 0 אם בטור יש מספר זוגי של ספרות 1. אם מספרן אי-זוגי, סיפרת הסכום היא 1.

טענה:

אם הסכום ("סכום נים") הוא 0, כלומר בכל הטורים בסיכום מופיעה הסיפרה 0, המצב K הוא מצב P. אחרת, היינו אם מופיעה בסכום לפחות סיפרה 1 אחת, המצב הוא מצב N.

הוכחת הטענה - נכנה בשם "זוגי" כל מצב אשר סכום נים שלו הוא 0.
קל להיווכח בשלוש העובדות הבאות:

(1) כשלפנינו מצב זוגי, אזי כל מהלך חוקי במשחק יהפוך אותו לבלתי זוגי; כי אם ניטול מספר כלשהו של גפרורים מערימה i, הרי מספר הגפרורים, K_i, ישתנה ולכן יהיה שינוי בהצגתו הבינרית של K_i, כלומר מספר אפסים יוחלפו ב-1 ולהיפך, וסכום נים יהיה בלתי זוגי.

(2) כשנתון מצב אי-זוגי, אזי קיים לפחות מהלך חוקי אחד שיהפוך אותו לזוגי. ההוכחה של עובדה זו קצת יותר קשה, אך לא בהרבה.

(3) "מצב האפס", $K_1 = K_2 = \ldots = K_n = 0$, הוא, על פי ההגדרה, מצב זוגי וכמו כן הוא מצב P, כלומר השחקן הקודם ביצע מהלך שהקנה לו את הנצחון.

משלוש האפשרויות שתוארו ברור כי מצב "זוגי" (כלומר, סכום נים אפס) הוא מצב P.
לעומת זאת מצב "אי זוגי" הוא מצב N.
מכאן שהטענה הוכחה.

הערה: במקרה של שלוש הערימות $(n = 3)$, המצב שהובא לעיל $(1,2,3)$ נותן "סכום נים" אפס:

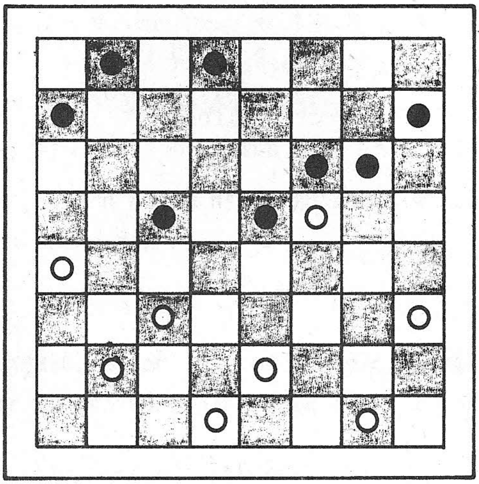
$$\begin{array}{r} 01 \\ 10 \\ \underline{11} \\ 00 \end{array}$$

זאת אומרת המצב זוגי, היינו P, כפי שהוכח לעיל.

3. השחורים והלבנים

נציג עתה וריאציה של משחק נים:

כלים שחורים ולבנים מוצבים אלה מול אלה בריבועים שרירותיים על לוח שחמט כבציור 1.



ציור 1

השחקן ה"שחור" יכול להזיז בתורו כלי שחור אחד בטורו בכיוון מעלה או מטה, אך אין הוא יכול לעלות על או לעבור מעבר לכלי לבן. הוא גם אינו יכול לנוע ימינה או שמאלה ולעבור לטור אחר.

בדומה לכך, השחקן ה"לבן" יכול להניע בתורו את הכלי הלבן בטורו בלבד בלי לפנות ימינה או שמאלה וכן אינו יכול לעלות על או לעבור מעבר לכלי שחור. השחקן המבצע את המהלך האחרון מנצח.

מהי האסטרטגיה של משחק זה?

במבט ראשון נדמה אולי שבמשחק זה יש מצבי תיקו, בגלל האפשרות להתקדם ולסגת עם כל כלי. אך אין הדבר כן:

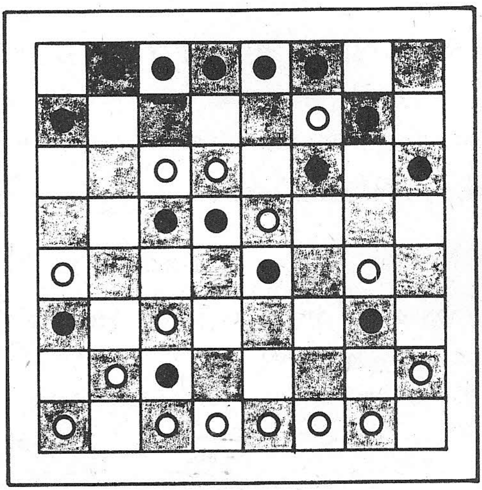
נתבונן <u>בהפרשים</u> כעל מספרי נים, כלומר נתייחס אל מספר המשבצות שבין הכלי הלבן לשחור בכל טור כאל מספר הגפרורים בערימה, כפי שתואר במשחק הקודם.

במקרה שלפנינו, הזזת כלי לבן או שחור לקראת הכלי שמולו שקולה כנגד הקטנת מספר הגפרורים בערימה המתאימה. הזזת הכלי בכיוון ההפוך (התרחקות הכלים) ב-m ריבועים מגדילה אמנם את מספר הגפרורים בערימה ב-m, אך התשובה למהלך כזה היא הזזת הכלי בצבע הפוך ב-m ריבועים קדימה באותו טור. על ידי צעד זה "מבטל" השחקן השני את מהלכו של השחקן הראשון.

מאחר ויתכן רק מספר סופי של צעדי נסיגה מסוג זה, הרי השחקן המפסיד איננו יכול להושע ממהלכי נסיגה כאלו ואילו השחקן המנצח איננו זקוק להם.

הקורא יכול לבדוק בנקל שסכום נים של ההפרשים בציור 1 הוא 101. זהו איפוא מצב N. השחקן הבא יכול לנצח על ידי יצירת סכום נים זוגי, כלומר 000. אחד המהלכים הוא העברת כלי בטור השני משמאל לריבוע הסמוך לכלי שמולו.
אפשרות אחרת היא העברת הכלי בטור הרביעי משמאל עד למרחק של שלושה ריבועים מן הכלי שמולו. (מהי אפשרות נוספת לנצח?)

הכללה: פשוטה של משחק זה מתקבלת על ידי הצבת מספר <u>זוגות</u> של כלים שחורים ולבנים בכל טור, כך שכלים שכנים בכל טור הם מצבעים שונים (ציור 2).



ציור 2

הכללים במשחק זה זהים לאלה שבמשחק הקודם, כלומר כל שחקן מזיז בתורו כלי בצבע מתאים בתוך הטור בו הוא שוכן, מבלי לעלות על או לעבור מעבר לכלי שכן.
גם כאן השיטה היא להתבונן במספרי הריבועים בין כל זוג כלים ולהתייחס אליהם כאל מספר גפרורים בערימה:
בציור 2 הפרשים אלה הם 1,2 בטור הראשון משמאל, 5 בטור השני וכו'. סכום נים של הפרשים אלה הוא 0. המצב הוא איפוא מצב P, והשחקן שיבצע ממצב זה את המהלך הראשון יובס במשחק על ידי יריב שעיניו בראשו.

שים לב שאין צורך שהכלים הלבנים יהיו כולם בצד אחד והשחורים בצד השני של הלוח. עבור מצב נתון כלשהו, האיסטרטגיה איננה משתנה אם נחליף למשל בציור 1 או 2 כל כלי שחור בלבן וכל כלי לבן בשחור בחלק מהטורים.

4. קרב המספרים

וריאציה אחרת של נים מתקבלת ע"י הגבלת מספר הגפרורים שניתן להרחיק בכל מהלך. אם נסכים שמותר להרחיק עד שני גפרורים בכל מהלך, הרי ב"קרב המספרים" עם ערימה אחת, המצבים 1 (גפרור אחד) ו-2 הם מצבי N. ואמנם השחקן הראשון לוקח את כל הגפרורים ומנצח. אך 3 (שלושה גפרורים) הוא מצב P: השחקן הראשון לוקח גפרור אחד או שניים, והשחקן השני לוקח את היתר ומנצח. באופן כזה רואים שגם 5, 4, הם מצבי N ו-6 הוא מצב P.

באופן כללי, כל הכפולות של 3 הן מצבי P, וכל שאר המצבים הם מצבי N. זאת מאחר והנצחון מבטח לשחקן המביא למצב שהוא כפולה של 3, ואילו מכל שאר המצבים אפשר להביא, במהלך אחד, למצב שהוא כפולה של 3.

במשחק של m ערימות, כל שחקן בתורו בוחר ערימה ומרחיק הימנה גפרור אחד או שניים.

נדון באיסטרטגיות הנצחון:
נניח קודם ש-m (מספר הערימות) זוגי. אם ניתן לחלק את הערימות לזוגות

$(K_m, K_{m-1}), \ldots, (K_2, K_1)$ כך שההפרשים $K_{i+1} - K_i$ בתוך הזוגות מתחלקים ב-3, הרי המצב הוא מצב P. כי אם שחקן מרחיק גפרור או שניים מערימה K_i, הרי יריבו יכול להרחיק אותו מספר מבת הזוג K_{i+1}, וכך לשמור על הפרש הכפולות של 3. היות והערימות קטנות בכל מהלך, השחקן השני יעבור למצב בו כל הערימות ריקות, שגם בו נשמר הפרש הכפולות של 3.

אם אין אפשרות לחלק את כל m הערימות לזוגות, כך שבכל זוג יהיה ההפרש כפולה של 3 (או יהיה זוג אחד לפחות בו ההפרש שונה מכפולת 3), המצב הוא N. במקרה זה, קיים בדיוק זוג ערימות אחד בו ההפרש אינו כפולה של 3. (כי מצב של שני זוגות ערימות בהן ההפרש אינו כפולה של 3 לא יתכן מאחר ובין ארבע הערימות קיים זוג אחד בו ההפרש אכן כפולה של 3 ואז חוזרים למקרה של ערימה אחת עם הפרש שונה מכפולת 3.) אזי השחקן הראשון יכול לקחת מאחת הערימות מספר גפרורים כזה (אחד או שניים) שיעמיד את ההפרש בין הערימות על כפולה של 3; דהיינו מצב P.

במשחק של m ערימות כאשר m אי זוגי, מצב P דורש חלוקה של זוגות ערימות שבהם ההפרש כפולה של 3, בתוספת ערימה אחת בה מספר הגפרורים הוא כפולה של 3. כל שאר המצבים הם מצבי N. (נשאיר לקורא להוכיח עובדה זו, כאשר כדאי לשים לב שלא יתכן מצב בו יהיה זוג ערימות בו ההפרש אינו כפולה של 3, בתוספת לערימה בודדת שבה כמות הגפרורים אינה כפולה של 3.) למשל, עבור שלוש ערימות,

המצב (1,6,10) הוא מצב P, כי 1-10 מתחלק ב-3. אם השחקן הבא עובר למצב (1,6,8), השחקן הקודם עובר ל (1,6,7) שהוא מצב P, וכו'.

ניתן לשחק גם וריאציה זו על לוח שחמט, אלא שהפעם מותר להזיז כל כלי בטור עד שני ריבועים קדימה <u>או</u> אחורה. למשל המצב בציור 1 הוא מצב N, ומהלך המאפס את המרחק בין שני הכלים בטור הראשון משמאל מבטיח נצחון (כי הוא מביא למצב P).

נציין עוד שאם נרשה להרחיק בכל מהלך עד S גפרורים מכל ערימה, הרי כל הדיון הקודם שריר וקיים: מצבי ה-P הם הכפולות של S+1 עבור ערימה אחת, וההפרשים $K_{i+1} - K_i$ אף הם כפולות של S+1 עבור מצב P במשחק עם מספר ערימות, כאשר ערימה אחת היא כפולה של S+1 אם m אי-זוגי. אך כאן יש מצבי P נוספים והקורא מוזמן למצוא את כולם. הדבר איננו קשה לאחר קריאתו של סעיף 10 במאמר עליו מבוסס המאמר הזה.

נסיים דיון זה בהזכרת וריאציה אחרת של נים: הכללים הם כמו של נים (סעיף 2), אך כל שחקן יכול, עם תום מהלכו בערימה K_i, לחלק את הגפרורים שנותרו בה לשתי ערימות. מתברר שהשחקן המפסיד איננו יכול להוושע מאופציה נוספת זו, והמנצח איננו נזקק לה; האיסטרטגיה נשארה זו של נים.

מהדוגמאות שהובאו עד עתה ניתן אולי לשער שכל הוריאציות של נים ניתנות לפתרון במצב של "נים ולא נים". בסעיף הבא נראה שאין הדבר כך

5. נים דו ממדי-בעיה בלתי פתורה

נסדר את ערימות הגפרורים במספר שורות ועמודות כשמספר הגפרורים בכל ערימה שרירותי. נוכל לתאר זאת על ידי מטריצה.

<u>מטריצה</u> מסדר mxn היא מערך של m שורות ו-n עמודות, המכילה mxn <u>איברים</u>, איבר אחד בכל הצטלבות של שורה ועמודה. האיבר הנמצא בהצטלבות השורה ה-i והעמודה ה-j מסומן a_{ij}. בציור 3 מובאת דוגמא למטריצה מסדר 4×4, שאיבריה מספרים שלמים אי-שליליים.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 5 & 2 \\ 2 & 5 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

ציור 3

6. במטריצה זו, לדוגמא, $a_{24} = 2$, $a_{42} = 0$, וכו'.

מטריצה זו יכולה לייצג מערך של $4\times4 = 16$ ערימות גפרורים, כאשר a_{ij} מציין את מספר הגפרורים בערימה הנמצאת בהצטלבות השורה ה-i והעמודה ה-j. כך, למשל, מציין a_{24} ערימה של שני גפרורים, a_{42} ערימה ריקה וכו'.

הוראות המשחק הן כדלקמן: נתונה מטריצה מסדר mxn המייצגת ערימות גפרורים. כל אחד משני השחקנים יכול, בתורו, לבחור שורה או עמודה ולקחת הימנה מספר חיובי כלשהו של גפרורים בכל הערימות או חלקן השייכות לשורה או העמודה שבחר.

ננסה לבנות את האיסטרטגיה של המשחק:
אם m ו-n שניהם זוגיים, אזי כל מצב שבו המטריצה סימטרית ביחס למרכזה הוא מצב P, כי השחקן השני יכול לחקות את מהלכי השחקן הראשון באיבר הסימטרי, וכך לנצח.

לדוגמא, אם השחקן הראשון לוקח (1,0,1,2) גפרורים מהשורה הרביעית במטריצה בציור 3, השחקן השני לוקח (2,1,0,1) גפרורים מהשורה הראשונה וכו'.

האיסטרטגיה הכללית, ובמיוחד זיהוי מצבי הנצחון וההפסד אינם ידועים.

נביא כאן רק כמה תוצאות עבור המקרה $a_{ij} < 1$ לכל i ו-j, היינו כל הערימות במבנה המטרציוני כוללות עד גפרור אחד. עבור $m = 1$ (שורה אחת), כל מצב הינו N, פרט לשורה הריקה. זאת כי השחקן הראשון לוקח את כל השורה ומנצח.

עבור $m = 2$, יהיה a מספר הטורים אשר בהם יש 1 בשורה הראשונה ו-0 בשניה, b מספר הטורים אשר בהם מופיע 1 בשורה השניה בלבד. ו-c מספר הטורים אשר בהם מופיע 1 בשני המקומות. ניתן כאן לראות כי המצב הוא מצב P אם ורק אם $a = b$ ו-c זוגי.

במאמר זה הובאה סידרת משחקים קומבינטוריים המבוססים על וריאציות של משחק נים. כל המעוניין בהרחבת הנושא למשחקים ופונקציות מורכבות יותר, כולל מבנה כללי של הוכחת האיסטרטגיות יקרא את המאמר המופיע בגליונות מתמטיקה כרך 6 מס' 1 היוצא לאור בחסות המחלקה להוראת המדעים במכון ויצמן למדע.

לאחר רכישת מיומנות ברזי המשחקים ניתן להביאם למשחק בכיתה, כאשר הנצחון מובטח כמובן לאלו היודעים את האיסטרטגיה המתאימה של המשחק.

לאלו שבידם מחשב כיס הניתן לתכנות, הרי אפשר לתכנת את איסטרטגית הנצחון, כך שהמחשב יכול להתחרות ולנצח את יריביו.